第10講　総合問題(2)

1　点 P$(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 Q$(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．P と Q が PQ$=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$s \neq 1$ のとき，u，v を s，t の式で表せ．

(2)　線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$t \geqq 1$ において，関数

$$f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$$

を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　記号 ＋ と － を重複を許し1列に並べてできる列のうち，同じ記号は3つ以上連続して並ばないものを考える．＋ と － という記号を全部で n 個 $(n \geqq 2)$ 使ってつくられるこのような列のうち，最後が ＋＋ または －－ で終わる列の個数を a_n とおき，最後が ＋－ または －＋ で終わる列の個数を b_n とおく．

(1)　a_{n+1} と b_{n+1} を a_n と b_n で表せ．

(2)　$\{a_n+rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるような r の値をすべて求めよ．

(3)　長さが n のこのような列の個数 a_n+b_n を，(2)で求めた r の値を使って表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題 (2)

1　点 P(s, t) は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 Q(u, v) は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．P と Q が PQ$=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$s \neq 1$ のとき，u，v を s，t の式で表せ．

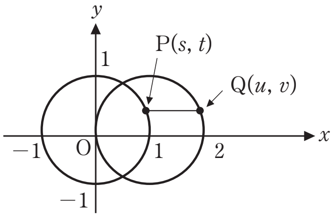
(2)　線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ．

(1)　$s^2+t^2=1$　……①

$(u-1)^2+v^2=1$　　つまり　$u^2-2u+v^2=0$　……②

$(s-u)^2+(t-v)^2=1$　　つまり　$s^2-2su+u^2+t^2-2tv+v^2=1$　……③

③に①，②を代入して



$(1-s)u=tv$　　つまり　$(1-s)^2u^2=t^2v^2$

これに①を代入して　$(1-s)^2u^2=(1-s^2)v^2$　$s \neq 1$　より

$(1-s)u^2=(1+s)v^2$　……④

②より　$(1+s)(u-1)^2+(1+s)v^2=1+s$　……⑤

④を⑤に代入して　$(1+s)(u^2-2u+1)+(1-s)u^2=1+s$

$u^2-(1+s)u=0$　　$u=0$，$1+s$

$u=0$ のとき，②より　$v^2=0$　ゆえに　$v=0$

$u=1+s$ のとき，③より　$1+(t-v)^2=1$　　$(t-v)^2=0$　　ゆえに　$v=t$

ところで，$u=1+s$ で $u=0$ のとき　$s=-1$　　このとき，①より　$t=0$　よって　$v=0$

よって　$(u,\ v)=(1+s,\ t)$　と集約できる．　ゆえに　$\boldsymbol{u=1+s}$，$\boldsymbol{v=t}$

(2)　PQ の中点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{t+v}{2}\right)$　これを $(x,\ y)$ とする．

(i)　$s=1$ のとき　$t=0$　　よって　P$(1,\ 0)$

ゆえに　$x=\dfrac{u+1}{2}$，$y=\dfrac{v}{2}$　このとき，Q$(u,\ v)$ は②を満たすすべての点を動く．

よって，M の軌跡は　$(2x-2)^2+(2y)^2=1$　　ゆえに　$(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

(ii)　$u=0$ のとき　$v=0$　　よって　Q$(0,\ 0)$

ゆえに　$x=\dfrac{s}{2}$，$y=\dfrac{t}{2}$　　このとき　P$(s,\ t)$ は①を満たすすべての点を動く．

よって，M の軌跡は　$(2x)^2+(2y)^2=1$　　ゆえに　$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

(iii)　$s \neq 1$　かつ　$u \neq 0$ のとき　(1)より　$u=1+s$，$v=t$　$(s \neq \pm 1)$

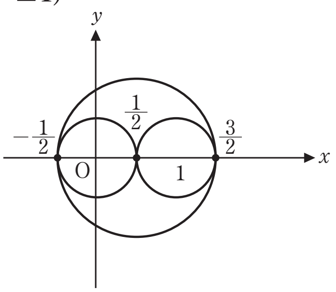
ゆえに　$x=\dfrac{2s+1}{2}$，$y=t$　このとき，P$(s,\ t)$ は

①上の $(\pm 1, 0)$ 以外のすべての点を動く．

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$　　$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除く．

ただし，この 2 点は(i)，(ii)に含まれる．

よって，求める軌跡は右図実線部分．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$t \geqq 1$ において，関数

$$f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$$

を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ.

$y=(x-t+2)(x+t)$　$t \geqq 1$　より　$t-2 \geqq -1$，$-t \leqq -1$

$t-2 \geqq 1$　つまり　$t \geqq 3$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{1}-(x-t+2)(x+t)dx=\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+t^2-2t)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+t^2-2t)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+(t^2-2t)x\right]_0^1=2\left(t^2-2t-\frac{1}{3}\right)=2(t-1)^2-\frac{8}{3}$$

$f(t)$ はこの範囲において単調増加．よって，最小値は　$f(3)=\dfrac{16}{3}$

$1 \leqq t \leqq 3$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{t-2}-(x-t+2)(x+t)dx+\int_{t-2}^{1}(x-t+2)(x+t)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(t^2-2t)x\right]_{-1}^{t-2}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-(t^2-2t)x\right]_{t-2}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}(t-2)^3-(t-2)^2+t(t-2)^2-\left(\frac{1}{3}-1-t(t-2)\right)$$
$$+\frac{1}{3}+1-t(t-2)-\left\{\frac{1}{3}(t-2)^3+(t-2)^2-t(t-2)^2\right\}$$
$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2t(t-2)^2+2=\frac{4}{3}(t-2)^3+2(t-2)^2+2$$

$$f'(t)=4(t-2)^2+4(t-2)=4(t-2)(t-1)$$

よって $t=2$ で最小値 2

以上より　$f(t)$ は $\boldsymbol{t=2}$ で最小値 **2** をとる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 記号 ＋ と － を重複を許し1列に並べてできる列のうち，同じ記号は3つ以上連続して並ばないものを考える．＋ と － という記号を全部で n 個 $(n \geqq 2)$ 使ってつくられるこのような列のうち，最後が ＋＋ または －－ で終わる列の個数を a_n とおき，最後が ＋－ または －＋ で終わる列の個数を b_n とおく．

(1) a_{n+1} と b_{n+1} を a_n と b_n で表せ．

(2) $\{a_n + rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるような r の値をすべて求めよ．

(3) 長さが n のこのような列の個数 $a_n + b_n$ を，(2)で求めた r の値を使って表せ．

(1) 同じ記号が3つ以上並ばないことから，

a_{n+1} として数えられる列は最後が －＋＋ または ＋－－ である．

これらから最後の記号を除いたものは，b_n として数えられるものでそのすべてである．

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1} = b_n}$

b_{n+1} として数えられる列は最後が ＋＋－，－＋－，＋－＋，－－＋ のいずれかである．

これらから最後の記号を除いたものは a_n または b_n として数えられるもので，合わせてそのすべてである．

ゆえに　$\boldsymbol{b_{n+1} = a_n + b_n}$

(2) $a_{n+1} + rb_{n+1} = b_n + r(a_n + b_n) = ra_n + (r+1)b_n$

また，$\{a_n + rb_n\}$ が公比 r の等比数列となるとき　$a_{n+1} + rb_{n+1} = r(a_n + rb_n) = ra_n + r^2 b_n$

$b_n \neq 0$ より　$r^2 = r + 1$　　ゆえに　$\boldsymbol{r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

(3) (2)より　$a_n + rb_n = (a_2 + rb_2) \cdot r^{n-2} = 2(1+r) \cdot r^{n-2} = 2r^n$

(2)の r を代入して

$$a_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2} b_n = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots①　　a_n + \frac{1-\sqrt{5}}{2} b_n = 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots②$$

(①－②)÷ $\sqrt{5}$ より　$b_n = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

よって　$a_n + b_n = b_{n+1} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 $0 \leqq a \leqq 2$ を満たす実数 a に対して，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-(3a+1)x+2a^2+2a$ とし，区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を $S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx$ とする．

(1) $0<a<1$ のとき $S(a)$ を求めよ．

(2) a が $0 \leqq a \leqq 2$ の値をとって変化するとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を考える.

$$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=x_n+y_n,\ y_{n+1}=5x_n+y_n$$

次の問いに答えよ.

(1) x_n および y_n をそれぞれ5で割ったときの余りを求めよ.

(2) $a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ.

(3) x_n および y_n を n の式で表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$0 \leqq a \leqq 2$ を満たす実数 a に対して，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-(3a+1)x+2a^2+2a$ とし，区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を $S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx$ とする.

(1)　$0<a<1$ のとき $S(a)$ を求めよ.

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の値をとって変化するとき，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ.

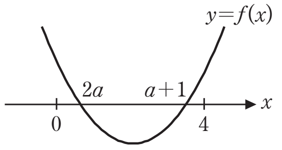
解答例

(1)　$f(x)=x^2-(3a+1)x+2a(a+1)=(x-2a)(x-a-1)$

よって　$x=2a,\ a+1$　のとき　$f(x)=0$

$2a<a+1$ となるのは　$a<1$ のとき

よって　$0<a<1$ のとき



$(f(x)=(x-2a)(x-a-1),\ 0<a<1)$

$$S(a)=\int_0^4 |f(x)|dx=\int_0^{2a} f(x)dx+\int_{2a}^{a+1}\{-f(x)\}dx+\int_{a+1}^4 f(x)dx$$

$$=\left(\int_0^4 f(x)dx-\int_{2a}^{a+1} f(x)dx\right)-\int_{2a}^{a+1} f(x)dx$$

ここがポイント．これにより ∫ がまとまり，かつ同じ積分計算を2回しなくても済む．今回はさらに1/6公式も使える形.

$$=\int_0^4 f(x)dx-2\int_{2a}^{a+1} f(x)dx$$

$$=\int_0^4 \{x^2-(3a+1)x+2a^2+2a\}dx-2\int_{2a}^{a+1}(x-2a)\{x-(a+1)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x\right]_0^4-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(a+1-2a)^3\right\}$$

$$=\frac{64}{3}-8(3a+1)+4(2a^2+2a)+\frac{1}{3}(1-a)^3$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}a^3+9a^2-17a+\frac{41}{3}}$$

(2)　$1<a<2$ のとき

$$S(a)=\int_0^{a+1} f(x)dx+\int_{a+1}^{2a}\{-f(x)\}dx+\int_{2a}^4 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx-2\int_{a+1}^{2a} f(x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x\right]_0^4-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(2a-a-1)^3\right\}$$

$$=\frac{64}{3}-8(3a+1)+4(2a^2+2a)+\frac{1}{3}(a-1)^3=\frac{1}{3}a^3+7a^2-15a+13$$

$0<a<1$ のとき　$S'(a)=-a^2+18a-17=-(a-1)(a-17)$

この範囲において $S'(a)<0$　すなわち，$S'(a)$ は単調減少である.

$1<a<2$ のとき　$S'(a)=a^2+14a-15=(a-1)(a+15)$

この範囲において $S'(a)>0$　すなわち，$S'(a)$ は単調増加である.

$a=1$ のとき　$2a=a+1$ より　$S(a)=\int_0^4 (x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^4=\frac{1}{3}\cdot 2^3=\frac{8}{3}$

よって，$S(a)$ は $\boldsymbol{a=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$ をとる.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える．

$$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=x_n+y_n,\ y_{n+1}=5x_n+y_n$$

次の問いに答えよ．

(1)　x_n および y_n をそれぞれ 5 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ．

(3)　x_n および y_n を n の式で表せ．

解答例

(1)　$x_1=1$，$y_1=5$ より　$x_2=x_1+y_1=6=5\cdot1+1$　　$y_2=5x_1+y_1=10=5\cdot2+0$

よって，x_n，y_n を 5 で割った余りはそれぞれ 1，0 と推測される．

ここで，$x_n=5c_n+1$，$y_n=5d_n$　(c_n，d_n は整数)　とおくと

$$x_{n+1}=x_n+y_n=5(5c_n+d_n)+1,\ y_{n+1}=5x_n+y_n=5(5c_n+1)+5d_n=5(5c_n+d_n+1)$$

よって，x_{n+1}，y_{n+1} を 5 で割った余りがそれぞれ 1，0 となる．

ゆえに，すべての自然数 n において x_n，y_n を 5 で割った余りはそれぞれ **1, 0** である．

(2)　$\{a_n\}$ すなわち $\{x_n+cy_n\}$ が等比数列となるとき

$x_{n+1}+cy_{n+1}=r(x_n+cy_n)$　とおける．

$x_{n+1}+cy_{n+1}=(x_n+y_n)+c(5x_n+y_n)=(5c+1)x_n+(c+1)y_n$ であり，$x_n\neq0$，$y_n\neq0$ より

$$1+5c=r,\ 1+c=rc \qquad \text{よって}\quad c^2=\frac{1}{5}\quad \text{より}\quad \boldsymbol{c=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

このとき　$r=1\pm\sqrt{5}$，$a_1=1\pm\sqrt{5}$（複号同順）より

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}=\boldsymbol{\left(1\pm\sqrt{5}\right)^n}$$

(3)　(2)より

$$x_n+\frac{1}{\sqrt{5}}y_n=\left(1+\sqrt{5}\right)^n\ \cdots\cdots①\qquad x_n-\frac{1}{\sqrt{5}}y_n=\left(1-\sqrt{5}\right)^n\ \cdots\cdots②$$

(①＋②)÷2 より　$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}$

(①－②)÷$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より　$\boldsymbol{y_n=\frac{\sqrt{5}}{2}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。